Esercizio: data la funzione $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$, trovare:

1. dominio
2. intersezione con gli assi cartesiani
3. positività di $f(x)$
4. limiti agli estremi del dominio
5. punti di discontinuità eventuali

① $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

x è definita su tutto $\mathbb{R}$

$e^{\frac{1}{x}}$ è definita per $x \neq 0$

Dom: $x \neq 0$

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

3 modi per scrivere lo stesso dominio

② Int. con l'asse x:

$$\begin{cases} y = xe^{\frac{1}{x}} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$e^{\frac{1}{x}}$ non è mai $= 0$

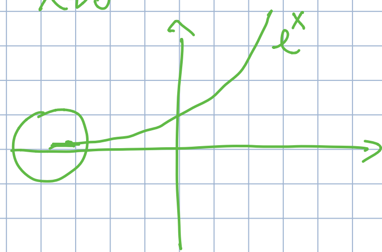
Int. con l'asse y:

$$\begin{cases} y = x \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x e^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = +\infty$

↳ gerarchia degli infiniti

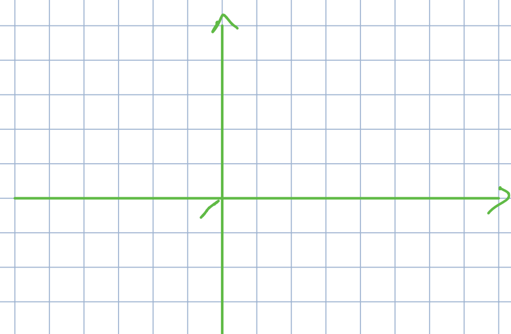
$\lim\limits_{x\to 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0^- e^{\frac{1}{0^-}} = 0^- e^{-\infty} = 0^-$



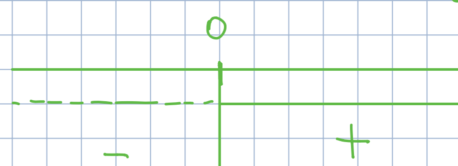
Per $x \to 0^+$, $x e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$

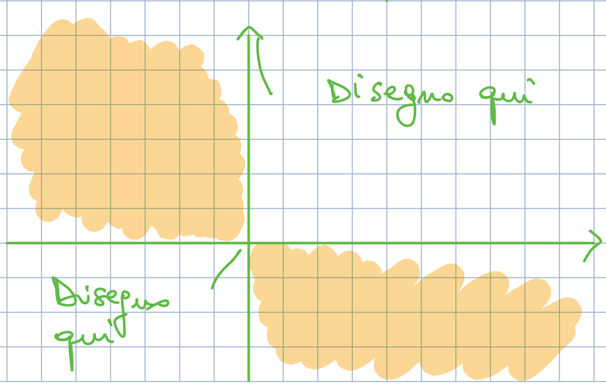
Per $x \to 0^-$, $x e^{\frac{1}{x}} \to 0^-$

$\Longrightarrow$ $x=0$ è punto di discontinuità a salto infinito



(3) $f(x) \geq 0 \Rightarrow x e^{\frac{1}{x}} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} > 0 \text{ sempre} \end{cases}$





④ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty}$ calcolato prima con la gerarchia degli infiniti:

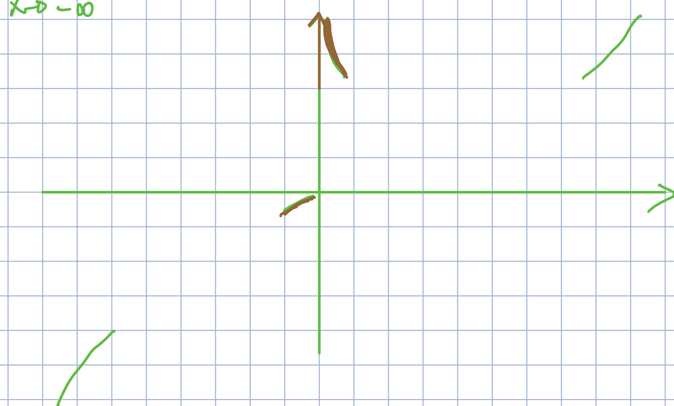
$$\lim_{x\to 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0^-$$

→ $x=0$ è un asintoto verticale destro

$$\lim_{x\to +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty\, e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty \cdot e^{0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} x e^{\frac{1}{x}} = -\infty\, e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty \cdot e^{0} = -\infty$$

non abbiamo asintoti orizzontali



Siccome non abbiamo asintoti orizzontali, vediamo se $\exists$ gli asintoti obliqui:

$$f(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} \infty$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x} e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^{0} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x e^{\frac{1}{x}} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x e^{\frac{1}{x}} - \lim_{x\to\pm\infty} x =$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}} - \lim_{x\to+\infty} x = +\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}} - \lim_{x\to-\infty} x = -\infty+\infty$$

forma indeterm. che possiamo sciogliere

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = 1$$

limite notevole che non facciamo

$y=x+1$ è asintoto obliquo

Esercizio: stessa cosa per $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$.

① Dominio: $x\neq 1$

$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

② Int. con gli assi:

asse y: $\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{x^2+2x}{x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

asse x: $\begin{cases} y=\dfrac{x^2+2x}{x-1} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x-1}=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+2x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2)=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

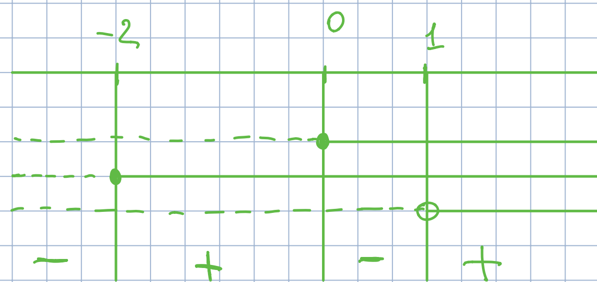
$P=(-2,0)$, $\quad O=(0,0)$

③ $f(x) \geq 0$

$$\frac{x^2+2x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$$

$$x^2+2x \geq 0 \Rightarrow x(x+2) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$



$f(x) \geq 0$ per $-2 \leq x \leq 0 \ \vee \ x > 1$

④
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+2x}{x-1} = \frac{3}{1^+-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2x}{x-1} = \frac{3}{1^--1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$x=1$ è asintoto verticale

e

⑤ $x=1$ è un punto di discontinuità a salto infinito

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x}{x-1} = -\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali

Controlliamo se esistono gli asintoti obliqui:

$f(x)$ è infinita per $x\to\infty$ ✓

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+2x}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x}{x(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x}{x^2-x}=1$$ ✓

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x}{x-1}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x-x(x-1)}{x-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}+x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-1}=3$$

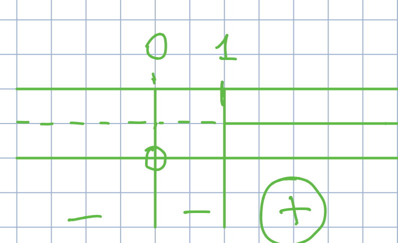
$y=x+3$ è l'asintoto obliquo

Esercizio: stesse cose per $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$.

① Dominio: essendo un logaritmo; argom >0

$$\frac{x-1}{x^2}>0 \Rightarrow \begin{cases}x-1>0\\ x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\ x\neq 0\end{cases}$$

($x=0 \to 0>0$ FALSO)



Dominio: $x>1$

(2) Int. con gli assi : per esercizio

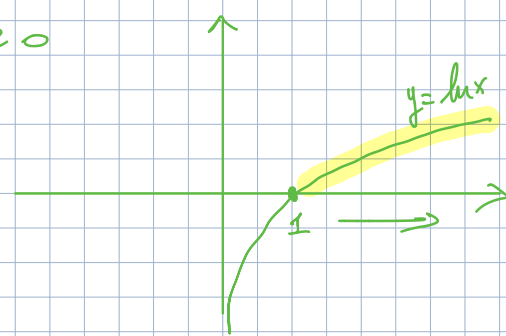
(3) Positività : $\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right) \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x^2} \geq 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x^2} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-1-x^2}{x^2} \geq 0$$

$x-1-x^2 \geq 0$

$x^2 > 0$



Da finire per esercizio

(4) per esercizio